i) $P(2i) = 8i^3 - 2(\sqrt{3}+i)4i^2 + 4(1+i\sqrt{3})2i - 8i$

$= -8i + 8(\sqrt{3}+i) + 8(i-\sqrt{3}) - 8i = 0$

ii) Soit $Q(z) = az^2 + bz + c$;

$(z-2i)Q(z) = (z-2i)(az^2+bz+c) = az^3 + bz^2 + cz - 2aiz^2 - 2biz - 2ci = az^3 + (b-2ai)z^2 + (c-2bi)z - 2ci$

Ainsi $P(z) = (z-2i)Q(z)$ équivaut à $\begin{cases} a=1 \\ b-2ai = -2(\sqrt{3}+i) \\ c-2bi = 4(1+i\sqrt{3}) \\ -2ci = -8i \end{cases}$; $\begin{cases} a=1 \\ b = -2\sqrt{3} - 2i + 2i \\ c = 4 + 4\sqrt{3}i + 2bi \\ c = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} a=1 \\ b=-2\sqrt{3} \\ c=4 \end{cases}$

iii) $P(z) = 0$ équivaut à $(z-2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$, $z = 2i$ ou $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

Le discriminant de $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4$ est $(-2\sqrt{3})^2 - 4\times1\times4 = 12 - 16 = -4 = (2i)^2$.

ainsi $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ équivaut à $z = \frac{2\sqrt{3}-2i}{2} = \sqrt{3} - i$ ou $z = \frac{2\sqrt{3}+2i}{2} = \sqrt{3} + i$.