Corrigé

On pose $t = z^2$. On a ainsi $t^2 = z^4$.

1. $z^4+z^2-6=0 \Leftrightarrow t^2+t-6=0 \Leftrightarrow t=2$ ou $t=-3 \Leftrightarrow z^2=2$ ou $z^2=-3 \Leftrightarrow z=-\sqrt{2}$ ou $z=\sqrt{2}$ ou $z=-\mathrm{i}\sqrt{3}$ ou $z=-\mathrm{i}\sqrt{3}$. Ainsi, $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2};-\mathrm{i}\sqrt{3};\mathrm{i}\sqrt{3}\right\}$.

2. $z^4+z^2-2=0 \Leftrightarrow t^2+t-2=0 \Leftrightarrow t=1$ ou $t=-2 \Leftrightarrow z^2=1$ ou $z^2=-2 \Leftrightarrow z=-1$ ou $z=1$ ou $z=-\mathrm{i}\sqrt{2}$ ou $z=-\mathrm{i}\sqrt{2}$. Ainsi, $S_{\mathbb{C}}=\left\{-1;1;-\mathrm{i}\sqrt{2};\mathrm{i}\sqrt{2}\right\}$.

3. $z^4+3z^2+2=0 \Leftrightarrow t^2+3t+2=0 \Leftrightarrow t=-1$ ou $t=-2 \Leftrightarrow z^2=-1$ ou $z^2=-2 \Leftrightarrow$ $z=-\mathrm{i}$ ou $z=\mathrm{i}$ ou $z=-\mathrm{i}\sqrt{2}$ ou $z=\mathrm{i}\sqrt{2}$. Ainsi, $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\mathrm{i};\mathrm{i};-\mathrm{i}\sqrt{2};\mathrm{i}\sqrt{2}\right\}$.

4. $8z^4+6z^2+1=0 \Leftrightarrow 8t^2+6t+1=0$ de discriminant $\Delta=6^2-4\times8\times1=4>0$ donc l'équation $8t^2+6t+1=0$ admet deux solutions réelles distinctes : $t_1=\dfrac{-6-2}{16}=-\dfrac{1}{2}$ et $t_2=\dfrac{-6+2}{16}=-\dfrac{1}{4}$. Ainsi, $8z^4+6z^2+1=0 \Leftrightarrow z^2=-\dfrac{1}{2}$ ou $z^2=-\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow z=-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $z=\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $z=-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ ou $z=\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. D'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2};\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{1}{2}\mathrm{i};\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$.

5. $8z^4+22z^2+15=0 \Leftrightarrow 8t^2+22t+15=0$ de discriminant $\Delta=22^2-4\times8\times15=4>0$ donc l'équation $8t^2+22t+15=0$ admet deux solutions réelles distinctes : $t_1=\dfrac{-22-2}{16}=-\dfrac{3}{2}$ et $t_2=\dfrac{-22+2}{16}=-\dfrac{5}{4}$. Ainsi, $8z^4+22z^2+5=0 \Leftrightarrow z^2=-\dfrac{3}{2}$ ou $z^2=-\dfrac{5}{4} \Leftrightarrow z=-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ ou $z=\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ ou $z=-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ou $z=\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.. Ainsi, $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{6}}{4};\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{6}}{4};-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{5}}{2};\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.

6. $z^3+5z+\dfrac{4}{z}=0$ est définie pour $z\neq0$. Et, pour $z\neq0$, $z^3+5z+\dfrac{4}{z}=0 \Leftrightarrow$ $z^4+5z^2+4=0 \Leftrightarrow t^2+5t+4=0$ de discriminant $\Delta=5^2-4\times1\times4=9>0$ donc l'équation $t^2+5t+4=0$ admet deux solutions réelles distinctes : $t_1=\dfrac{-5-3}{2}=-4$ et $t_2=\dfrac{-5+3}{2}=-1$. Ainsi, $z^3+5z+\dfrac{4}{z}=0 \Leftrightarrow z^2=-4$ ou $z^2=-1 \Leftrightarrow z=-2\mathrm{i}$ ou $z=2\mathrm{i}$ ou $z=-\mathrm{i}$ ou $z=\mathrm{i}$. Ainsi, $S_{\mathbb{C}}=\{-2\mathrm{i};2\mathrm{i};-\mathrm{i};\mathrm{i}\}$.

7. $z^2+2=\dfrac{3}{z^2}$ est définie pour $z\neq0$. Et, pour $z\neq0$, $z^2+2=\dfrac{3}{z^2} \Leftrightarrow z^4+2z^2-3=0 \Leftrightarrow t^2+2t-3=0$ de discriminant $\Delta=2^2-4\times1\times(-3)=16>0$ donc l'équation $t^2+2t-3=0$ admet deux solutions réelles distinctes : $t_1=\dfrac{-2-4}{2}=-3$ et $t_2=\dfrac{-2+4}{2}=1$. Ainsi $z^3+5z+\dfrac{4}{z}=0 \Leftrightarrow z^2=1$ ou $z^2=-3 \Leftrightarrow z=-1$ ou $z=1$ ou $z=-\mathrm{i}\sqrt{3}$ ou $z=\mathrm{i}\sqrt{3}$. D'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{-1;1;-\mathrm{i}\sqrt{3};\mathrm{i}\sqrt{3}\right\}$.

8. $\dfrac{2}{z^4}+\dfrac{7}{z^2}=-3$ est définie pour $z\neq 0$. Et, pour $z\neq 0$, $\dfrac{2}{z^4}+\dfrac{7}{z^2}=-3 \Leftrightarrow 3z^4+7z^2+2=0 \Leftrightarrow 3t^2+7t+2=0$ de discriminant $\Delta=7^2-4\times 3\times 2=25>0$ donc l'équation $3t^2+7t+2=0$ admet deux solutions réelles distinctes : $t_1=\dfrac{-7-5}{6}=-2$ et $t_2=\dfrac{-7+5}{6}=-\dfrac{1}{3}$. Ainsi $\dfrac{2}{z^4}+\dfrac{7}{z^2}=-3 \Leftrightarrow z^2=-2$ ou $z^2=-\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow z=-\mathrm{i}\sqrt{2}$ ou $z=\mathrm{i}\sqrt{2}$ ou $z=-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ou $z=\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ainsi $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\mathrm{i}\sqrt{2};\mathrm{i}\sqrt{2};-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3};\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.