Corrigé

1. a. $P(0) = 1 \neq 0$ donc 0 n'est pas une racine de P.

   b. Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $u = z - \dfrac{1}{z}$. Alors $u^2 = \left(z - \dfrac{1}{z}\right)^2 = z^2 - 2 + \dfrac{1}{z^2}$. D'où $\dfrac{P(z)}{z^2} = z^2 + 2z - 5 - \dfrac{2}{z} + \dfrac{1}{z^2} = z^2 + \dfrac{1}{z^2} - 2 - 3 + 2\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$ et donc $\dfrac{P(z)}{z^2} = z^2 + \dfrac{1}{z^2} - 2 + 2\left(z - \dfrac{1}{z}\right) - 3 = u^2 + 2u - 3$.

2. $P(z) = 0 \Leftrightarrow u^2 + 2u - 3 = 0 \Leftrightarrow u = 1$ ou $u = -3$. Ainsi, $P(z) = 0 \Leftrightarrow z - \dfrac{1}{z} = 1$ ou $z - \dfrac{1}{z} = -3 \Leftrightarrow z^2 - z - 1 = 0$ ou $z^2 + 3z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $z = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, car le discriminant du trinôme $z^2 - z - 1$ est $\Delta_1 = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$ donc $z^2 - z - 1$ admet deux racines réelles distinctes : $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$; ou $z = \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$ ou $z = \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$, car le discriminant du trinôme $z^2 + 3z - 1$ est $\Delta_2 = 3^2 - 4 \times 1 \times$

   $(-1) = 13 > 0$ donc $z^2 + 3z - 1$ admet deux racines réelles distinctes : $\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$ et $\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$. En conclusion, $S_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}; \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\right\}$.