Corrigé

$P(1) = 2-14+38-26 = 0$ donc 1 est une racine de P et P se factorise donc par $(z-1)$.
On cherche maintenant les réels a, b et c tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-1)(az^2 + bz + c)$

$$\Leftrightarrow az^3+(b-a)z^2+(c-b)z-c = 2z^3-14z^2+38z-26 \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b-a=-14 \\ c-b=38 \\ -c=-26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-12 \\ c=26 \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-1)(2z^2-12z+26) = 2(z-1)(z^2-6z+13)$.
Soit Δ le discriminant du trinôme. Alors $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 13 = -16 = (4\mathrm{i})^2 < 0$ donc $z^2-6z+13$ admet deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{6-4\mathrm{i}}{2} = 3-2\mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 3+2\mathrm{i}$.
En conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = 2(z-1)(z-3+2\mathrm{i})(z-3-2\mathrm{i})$.