Corrigé

On note $z = a + ib$ avec a et b réels. On peut alors écrire $\overline{z} = a - ib$.

1. $z = \overline{z} \Leftrightarrow a + \mathrm{i}b = a - \mathrm{i}b \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$. Donc $S_{\mathbb{C}} = \mathbb{R}$.

2. $z = -\overline{z} \Leftrightarrow a + \mathrm{i}b = -a + \mathrm{i}b \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$. Donc $S_{\mathbb{C}} = \mathrm{i}\mathbb{C}$.

3. $z = \mathrm{i}\overline{z} \Leftrightarrow a + \mathrm{i}b = \mathrm{i}(a - \mathrm{i}b) \Leftrightarrow a + \mathrm{i}b = \mathrm{i}a + b \Leftrightarrow a = b$. Donc $S_{\mathbb{C}} = \{a(1 + \mathrm{i})/a \in \mathbb{R}\}$.

4. $z = -\mathrm{i}\overline{z} \Leftrightarrow a + \mathrm{i}b = -\mathrm{i}(a - \mathrm{i}b) \Leftrightarrow a + \mathrm{i}b = -\mathrm{i}a - b \Leftrightarrow a = -b$. Donc $S_{\mathbb{C}} = \{a(1 - \mathrm{i})/a \in \mathbb{R}\}$.

5. $z^2 = z\overline{z} \Leftrightarrow z(z - \overline{z}) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = \overline{z}$. Donc $S_{\mathbb{C}} = \mathbb{R}$.