Corrigé

1. $z^3-1=z^3-1^3=(z-1)(z^2+z+1)=(z-1)\left(z+\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ car z^2+z+1 a pour discriminant $\Delta=1^2-4\times1\times1=-3=\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2<0$ et admet donc deux racines complexes conjuguées : $z_1=\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\overline{z_1}=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $z^3+27=z^3-(-3)^3=(z-(-3))\left(z^2+(-3)z+(-3)^2\right)=(z+3)(z^2-3z+9)=(z+3)\left(z-\frac{3}{2}+\mathrm{i}\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(z-\frac{3}{2}-\mathrm{i}\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ car z^2-3z+9 admet pour discriminant $\Delta=(-3)^2-4\times1\times9=-27=\left(3\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2<0$ et admet donc deux racines complexes conjuguées : $z_1=\frac{3-3\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=-\frac{3}{2}-\mathrm{i}\frac{3\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\overline{z_1}=\frac{3}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. $z^4-16=z^4-2^4=\left(z^2\right)^2-(2^2)^2=(z^2-2^2)(z^2+2^2)=(z-2)(z+2)(z^2+4)$ $=(z-2)(z+2)(z-2\mathrm{i})(z+2\mathrm{i})$.
4. $z^5-\mathrm{i}=z^5-\mathrm{i}^5=(z-\mathrm{i})(z^4+\mathrm{i}z^3+\mathrm{i}^2z^2+\mathrm{i}^3z+\mathrm{i}^4)=(z-\mathrm{i})(z^4+\mathrm{i}z^3-z^2-\mathrm{i}z+1)$.