i) $$(z^2+2z-3)(z^2+2z+5) = \begin{array}{l} z^4+2z^3+5z^2 \\ \quad +2z^3+4z^2+10z \\ \qquad -3z^2-6z-15 \end{array} = z^4+4z^3+6z^2+4z-15 = P(z)$$

ii) D'après i), $P(z)=0$ équivaut à $z^2+2z-3=0$ ou $z^2+2z+5=0$.

Le discriminant de z^2+2z-3 est $2^2-4\times1\times(-3) = 4+12 = 16 = 4^2$;

les solutions de $z^2+2z-3=0$ sont $\frac{-2-4}{2} = -3$ et $\frac{-2+4}{2} = 1$.

Le discriminant de z^2+2z+5 est $2^2-4\times1\times5 = 4-20 = -16 = (4i)^2$;

les solutions de $z^2+2z+5=0$ sont $\frac{-2-4i}{2} = -1-2i$ et $\frac{-2+4i}{2} = -1+2i$.

En conclusion, les solutions de $P(z)=0$ sont -3, 1, $-1-2i$ et $-1+2i$.