Corrigé

1. a. Soient u et v des nombres complexes. Alors $u^3 - v^3 = (u-v)(u^2+uv+v^2)$.

   b. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = z^6 - 1 = (z^2)^3 - 1^3 = (z^2-1)\left[(z^2)^2 + z^2 \times 1 + 1^2\right] = (z^2-1)(z^4+z^2+1)$.

2. a. $\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 2 \times \frac{1}{2} \times \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et

   $\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 2 \times \frac{1}{2} \times \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   b. D'après la question 1.b., $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1$ ou $z = -1$ ou $z^4 + z^2 + 1 = 0$. En posant $u = z^2$, on obtient alors $z^4 + z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow u^2 + u + 1 = 0$. Le discriminant de ce trinôme du second degré vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 = \left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 < 0$ donc $u^2 + u + 1 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées : $\frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Ainsi, $z^4 + z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z^2 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, à l'aide de la question 2.a., et car un nombre et son opposé ont le même carré.

   En conclusion, l'ensemble des racines du polynôme P est :

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{-1; 1; -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$