Corrigé

On pose $z_1 = a + \mathrm{i}b$ et $z_2 = a' + \mathrm{i}b'$.

1. $\begin{cases} \frac{1}{2}z_1 + z_2 = 2 \\ \frac{1}{2}\overline{z_1} + \mathrm{i}\overline{z_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{2}a + a'\right) + \mathrm{i}\left(\frac{1}{2}b + b'\right) = 2 \\ \left(\frac{1}{2}a + b'\right) + \mathrm{i}\left(a' - \frac{1}{2}b\right) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a + a' = 2 \\ \frac{1}{2}b - b' = 0 \\ \frac{1}{2}a + b' = 0 \\ a' - \frac{1}{2}b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ a' = 1 \\ b' = -1 \end{cases}$ d'où $z_1 = 2 + 2\mathrm{i}$ et $z_2 = 1 - \mathrm{i}$.

2. Une autre possibilité est de prendre le conjugué des deux membres de la deuxième ligne de ce système. En effet :

   $\overline{\overline{z_1} + 2\overline{z_2}} = \overline{\overline{z_1}} + \overline{2\overline{z_2}} = z_1 + 2z_2$ et $\overline{2} = 2$.

   $\begin{cases} 3z_1 - 2z_2 = 4\mathrm{i} - 2 \\ \overline{z_1} + 2\overline{z_2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3z_1 - 2z_2 = 4\mathrm{i} - 2 : (L_1) \\ z_1 + 2z_2 = 2 : (L_2) \end{cases}$

   $\Leftrightarrow \begin{cases} (L_1 + L_2) : 4z_1 = 4\mathrm{i} \\ (L_1 - 3 \times L_2) : -8z_2 = 4\mathrm{i} - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \mathrm{i} \\ z_2 = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{i} \end{cases}$.

   Et donc $S_{\mathbb{C}} = \left\{\left(\mathrm{i}; 1 - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\right\}$.

3. $\begin{cases} z_1 - z_2 = 3 - 4\mathrm{i} \\ \overline{z_1} + 2\overline{z_2} = 8 - \mathrm{i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 - z_2 = 3 - 4\mathrm{i} \\ z_1 + 2z_2 = 8 + \mathrm{i} \end{cases}$ d'où $S_{\mathbb{C}} = \left\{\left(\frac{14}{3} - \mathrm{i}\frac{7}{3}; \frac{5}{3} + \mathrm{i}\frac{5}{3}\right)\right\}$.

4. $\begin{cases} 6z_1 - 3z_2 = 12 + \mathrm{i} \\ 3\overline{z_1} - \overline{z_2} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6z_1 - 3z_2 = 12 + \mathrm{i} \\ 3z_1 - z_2 = 6 \end{cases}$ d'où $S_{\mathbb{C}} = \left\{\left(2 - \frac{1}{3}\mathrm{i}; -\mathrm{i}\right)\right\}$.