Corrigé

1. $P(2) = 2^3 - 4 \times 2^2 + 6 \times 2 - 4 = 8 - 16 + 12 - 4 = 0$ donc 2 est une racine de P. Ainsi, P se factorise par $(z-2)$.

2. On cherche les réels a, b et c tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-2)(az^2 + bz + c)$
$\Leftrightarrow az^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2c = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -4 \\ c - 2b = 6 \\ -2c = -4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases} .$$
Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-2)(z^2 - 2z + 2)$.

3. $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2)(z^2 - 2z + 2) = 0 \Leftrightarrow z = 2$ ou $z^2 - 2z + 2 = 0$. On reconnaît un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 = (2\mathrm{i})^2 < 0$ donc $z^2 - 2z + 2 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{2 - 2\mathrm{i}}{2} = 1 - \mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1 + \mathrm{i}$. Ainsi $S_{\mathbb{C}} = \{2; 1 - \mathrm{i}; 1 + \mathrm{i}\}$.