## ■ Théorème

Soient $a$, $b$, $c$ des nombres réels avec $a \neq 0$. Considérons une fonction polynômiale de degré 2 sous forme développée

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

On pose $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ et on note *signe*$(a)$ le signe du nombre réel $a$.

▷ On peut écrire $P(x)$ sous la forme $P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\beta = P(\alpha)$.

▷ La droite verticale d'équation $x = \alpha$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction $P(x)$.

▷ On a l' égalité $c = P(0)$ (ordonnée à l'origine).

▷ Lorsque $a > 0$, le tableau des variations de la fonction $P(x)$ est

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | $\searrow$ | $\beta$ | $\nearrow$ | |

▷ Lorsque $a < 0$, le tableau des variations de la fonction $P(x)$ est

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | $\nearrow$ | $\beta$ | $\searrow$ | |

▷ Lorsque $\Delta < 0$

i) l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de solution

ii) le tableau des signes de $P(x)$ est

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | signe(a) | |

▷ Lorsque $\Delta = 0$

i) l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution $s = \alpha$

ii) on a la factorisation $P(x) = a(x-s)^2$

iii) le tableau des signes de $P(x)$ est

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | signe(a) | 0 | signe(a) | |

▷ Lorsque $\Delta > 0$

i) l'équation $P(x) = 0$ admet deux solutions distinctes $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

ii) en notant $s$ et $s'$ ces solutions, on a la factorisation $P(x) = a(x-s)(x-s')$

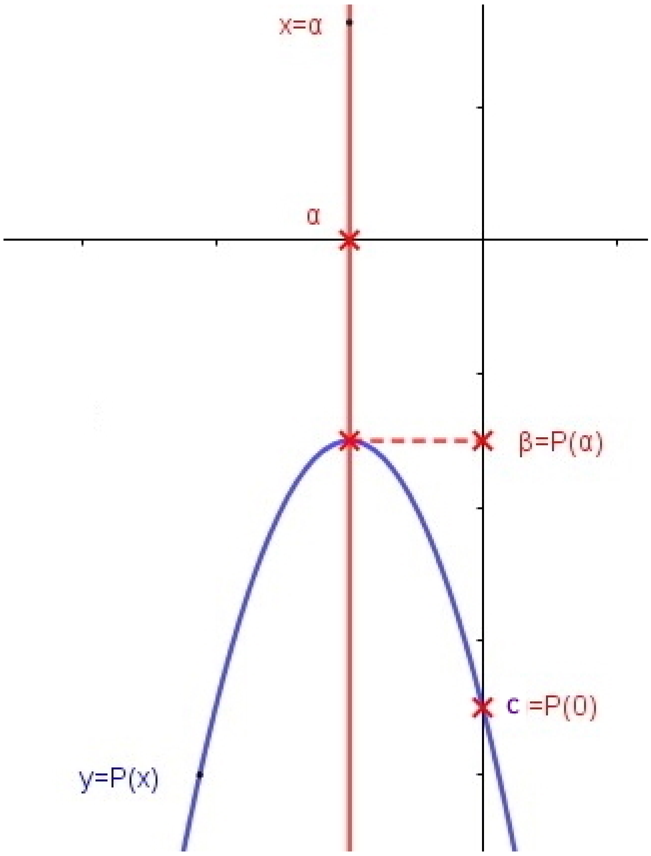
iii) la somme et le produit des solutions sont donnés par les formules $s + s' = -\frac{b}{a}$ et $s \times s' = \frac{c}{a}$

iv) en supposant les solutions ordonnées telles que $s < s'$, le tableau des signes de $P(x)$ est

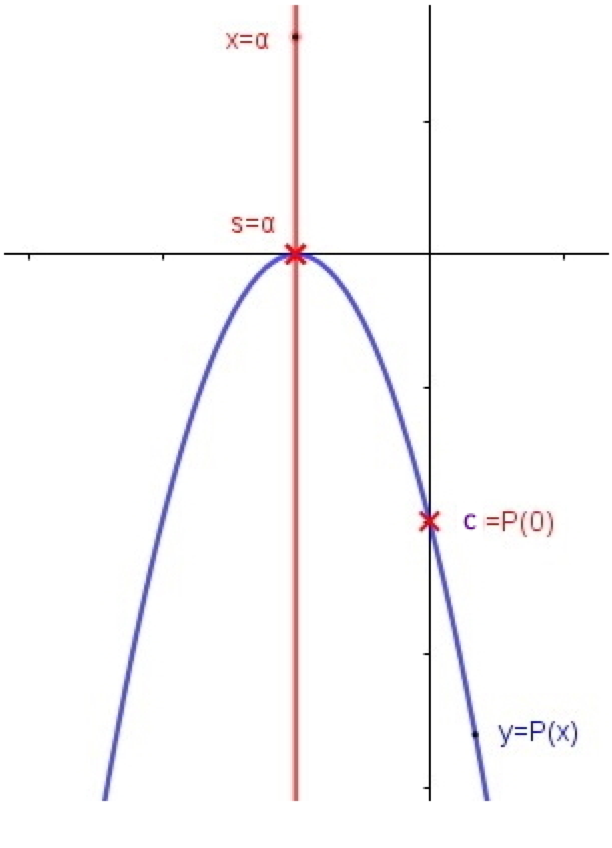
| $x$ | $-\infty$ | | $s$ | | $s'$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | *signe*$(a)$ | 0 | $-$*signe*$(a)$ | 0 | *signe*$(a)$ | |

▷ Il y a $6 = 2 \times 3$ situations possibles pour la courbe représentative de la fonction $P(x)$ selon que $a < 0$ ou $a > 0$ et selon que $\Delta < 0$ ou $\Delta = 0$ ou $\Delta > 0$.

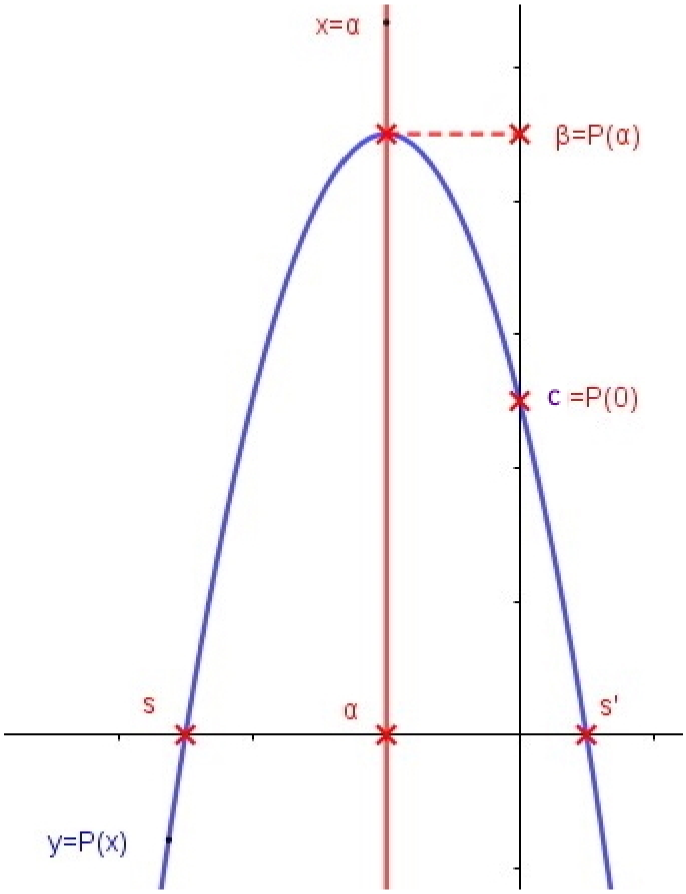
• Cas $a < 0$ et $\Delta < 0$.



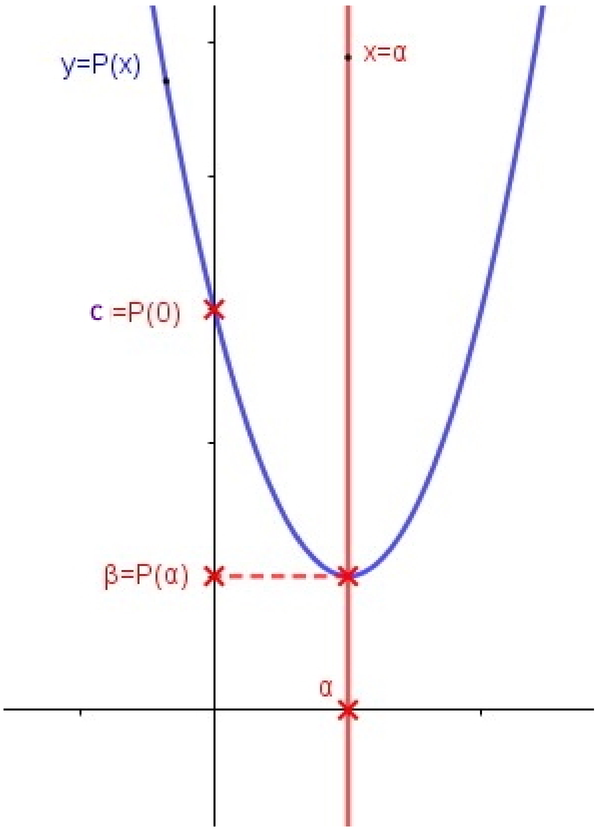

• Cas $a < 0$ et $\Delta = 0$.



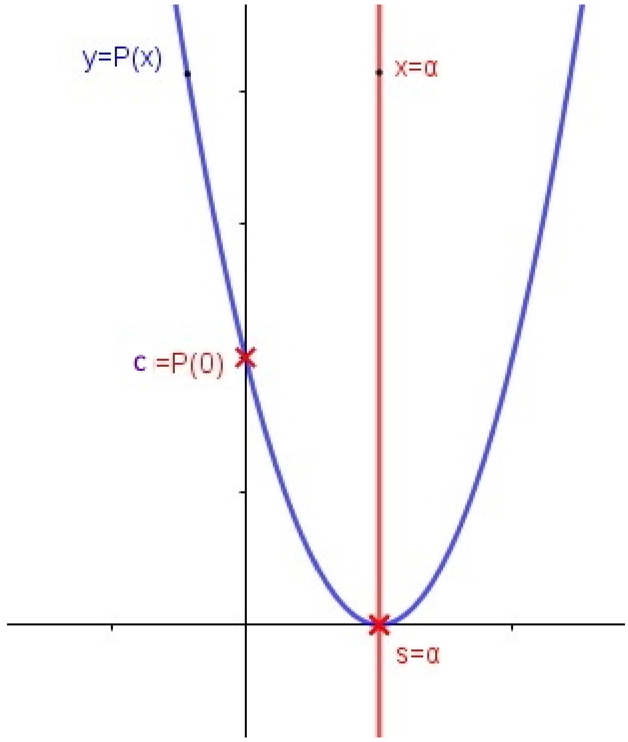
• Cas $a < 0$ et $\Delta > 0$.




• Cas $a > 0$ et $\Delta < 0$.



• Cas $a > 0$ et $\Delta = 0$.




• Cas $a > 0$ et $\Delta > 0$.