Sujet

On considère le polynôme de degré 2 suivant $g(x) = 9x^2 + 30x + 25$.

q1) Montrer que la forme canonique du polynôme $g(x)$ est $9\left(x + \frac{5}{3}\right)^2$.

q2) A l'aide de la forme canonique du polynôme $g(x)$, montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution réelle $-\frac{5}{3}$.

q3) Donner la forme factorisée du polynôme $g(x)$.

q4) A l'aide de la forme factorisée du polynôme $g(x)$, réaliser le tableau de signes de $g(x)$ et en déduire les solutions de l'inéquation $g(x) \leq 0$.

q5) A l'aide de la forme canonique du polynôme $g(x)$, montrer que la fonction $g(x)$ est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty; -\frac{5}{3}\right]$ et est strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{5}{3}; +\infty\right[$. Dresser le tableau des variations de la fonction $g(x)$.

q6) A l'aide de la forme canonique du polynôme $g(x)$, montrer que pour tout nombre réel r positif ou nul, on a $g\left(-\frac{5}{3} - r\right) = g\left(-\frac{5}{3} + r\right)$. Que peut-on déduire de cette égalité pour la courbe représentative de la fonction g ?

q7) A l'aide de l'ordonnée à l'origine $g(0)$ et des résultats obtenus précédemment, représenter la courbe représentative de la fonction g.

q8) A l'aide de la calculatrice, représenter la courbe représentative de la fonction g et vérifier l'intégralité des questions précédentes.

Corrigé (Ceci est un corrigé très détaillé. Dans la pratique, une rédaction beaucoup plus concise est attendue.)

1) Mettons le polynôme $g(x) = 9x^2 + 30x + 25$ sous forme canonique.

a) On factorise par le coefficient de x^2 si il est différent de 1.

$$9x^2 + 30x + 25 = 9x^2 + 9 \times \frac{30}{9}x + 9 \times \frac{25}{9} = 9\left(x^2 + \frac{30}{9}x + \frac{25}{9}\right).$$

b) On fait apparaître le facteur 2 devant x dans l'objectif d'appliquer l'une des identités remarquables $(x+r)^2 = x^2 + 2rx + r^2$ ou $(x-r)^2 = x^2 - 2rx + r^2$.

$$9\left(x^2 + \frac{30}{9}x + \frac{25}{9}\right) = 9\left(x^2 + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{30}{9}x + \frac{25}{9}\right) = 9\left(x^2 + 2 \times \frac{15}{9}x + \frac{25}{9}\right) = 9\left(x^2 + 2 \times \frac{5}{3}x + \frac{25}{9}\right).$$

c) On reconnaît en $x^2 + 2 \times \frac{5}{3}x$ le début d'un carré à l'aide d'une des identités remarquables $(x+r)^2 = \boxed{x^2 + 2rx} + r^2$ ou $(x-r)^2 = \boxed{x^2 - 2rx} + r^2$ puis on retranche ce qui est nécessaire pour conserver l'égalité.

$$9\left(\boxed{x^2 + 2 \times \frac{5}{3}x} + \frac{25}{9}\right) = 9\left(\boxed{\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2} + \frac{25}{9}\right).$$

d) On effectue quelques simplifications.

$$\begin{aligned} 9\left(\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \frac{25}{9}\right) &= 9\left(\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} + \frac{25}{9}\right) \\ &= 9\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

e) En conclusion

$$g(x) = 9x^2 + 30x + 25 = 9\left(x + \frac{5}{3}\right)^2.$$

2) A l'aide de la forme canonique du polynôme $g(x)$, étudions les solutions de l'équation $g(x) = 0$.

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\iff 9\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{5}{3}\right)^2 = 0 \\ &\iff x + \frac{5}{3} = 0 \qquad (r^2 = 0 \iff r \times r = 0 \iff r = 0 \quad \vee \quad r = 0 \iff r = 0) \\ &\iff x = -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

(Le symbole $\vee$ signifie « ou ».)

3) A l'aide de la forme canonique du polynôme $g(x)$, déterminons la forme factorisée de $g(x)$.

Sachant $g(x) = 9\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 = 9 \times \left(x + \frac{5}{3}\right) \times \left(x + \frac{5}{3}\right)$, on obtient que $g(x)$ est déjà sous forme factorisée.

4) A l'aide de la forme factorisée du polynôme $g(x)$, réalisons le tableau de signes de $g(x)$ et déduisons en les solutions de l'inéquation $g(x) \geq 0$.

Sachant $g(x) = 9\left(x + \frac{5}{3}\right)^2$ et

(i) $9 > 0$

(ii) $\left(x+\frac{5}{3}\right)^2 \geq 0 \qquad$ car $\forall r \in \mathbb{R} \quad r^2 \geq 0$

(iii) $\left(x+\frac{5}{3}\right)^2 = 0 \iff x+\frac{5}{3} = 0 \qquad$ car $\forall r \in \mathbb{R} \quad r^2 = 0 \iff r = 0$

on obtient immédiatement le tableau de signes de $g(x) = 9\left(x+\frac{5}{3}\right)^2$.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
9		$+$		$+$	
$\left(x+\frac{5}{3}\right)^2$		$+$	0	$+$	
$g(x) \ = \ 9\left(x+\frac{5}{3}\right)^2$		$+$	0	$+$	

de telle sorte que l'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) \geq 0$ est $\mathbb{R}$.

5) A l'aide de la forme canonique du polynôme $g(x)$, montrons que la fonction $g(x)$ est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty; -\frac{5}{3}\right]$.

Soient x et x' deux nombres réels dans l'intervalle $\left]-\infty; -\frac{5}{3}\right]$ dans un certain ordre strict, par exemple

$$x < x' \leq -\frac{5}{3}.$$

Montrons que les images $g(x)$ et $g(x')$ de x et x' par la fonction g sont dans l'ordre strict contraire, c'est-à dire montrons

$$g(x) > g(x').$$

Avec la forme canonique, on a

$$g(x) = 9\left(x+\frac{5}{3}\right)^2 \qquad \text{et} \qquad g(x') = 9\left(x'+\frac{5}{3}\right)^2.$$

Par hypothèse

$$x < x' \leq -\frac{5}{3}.$$

En ajoutant $\frac{5}{3}$ membre à membre, opération qui conserve l'ordre, on obtient

$$x+\frac{5}{3} < x'+\frac{5}{3} \leq 0.$$

En passant au carré membre à membre, et sachant que la fonction carré est strictement décroissante sur l'ensemble des nombres négatifs ou nuls soit $a < b \leq 0 \Rightarrow a^2 > b^2$, on obtient

$$\left(x+\frac{5}{3}\right)^2 > \left(x'+\frac{5}{3}\right)^2.$$

En multipliant par 9 membre à membre, opération qui conserve l'ordre car $9 > 0$, on obtient

$$9\left(x+\frac{5}{3}\right)^2 > 9\left(x'+\frac{5}{3}\right)^2$$

soit

$$g(x) > g(x').$$

A l'aide de la forme canonique du polynôme $g(x)$, montrons que la fonction $g(x)$ est strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{5}{3};+\infty\right[$.
Soient x et x' deux nombres réels dans l'intervalle $\left[-\frac{5}{3};+\infty\right[$ dans un certain ordre strict, par exemple

$$-\frac{5}{3} \leq x < x'.$$

Montrons que les images $g(x)$ et $g(x')$ de x et x' par la fonction g sont dans le même ordre strict, c'est-à dire montrons

$$g(x) < g(x').$$

Avec la forme canonique, on a

$$g(x) = 9\left(x+\frac{5}{3}\right)^2 \qquad \text{et} \qquad g(x') = 9\left(x'+\frac{5}{3}\right)^2.$$

Par hypothèse

$$-\frac{5}{3} \leq x < x'.$$

En ajoutant $\frac{5}{3}$ membre à membre, opération qui conserve l'ordre, on obtient

$$0 \leq x+\frac{5}{3} < x'+\frac{5}{3}.$$

En passant au carré membre à membre, et sachant que la fonction carré est strictement croissante sur l'ensemble des nombres positifs ou nuls soit $0 \leq a < b \leq\Rightarrow a^2 < b^2$, on obtient

$$\left(x+\frac{5}{3}\right)^2 < \left(x'+\frac{5}{3}\right)^2.$$

En multipliant par 9 membre à membre, opération qui conserve l'ordre car $9 > 0$, on obtient

$$9\left(x+\frac{5}{3}\right)^2 < 9\left(x'+\frac{5}{3}\right)^2$$

soit

$$g(x) < g(x').$$

Notons également qu'avec la forme canonique de $g(x) = 9\left(x+\frac{5}{3}\right)^2$, on obtient immédiatement

$$g\left(-\frac{5}{3}\right) = 9\left(-\frac{5}{3}+\frac{5}{3}\right)^2 = 9 \times 0^2 = 9 \times 0 = 0.$$

En conclusion, le tableau des variations de la fonctions g sur $\mathbb{R}$ est

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

6) A l'aide de la forme canonique du polynôme $g(x)$, montrons que pour tout nombre réel r positif ou nul, on a $g\left(-\frac{5}{3}-r\right) = g\left(-\frac{5}{3}+r\right)$ puis interprétons graphiquement cette égalité.
La forme canonique de $g(x)$ étant $g(x) = 9\left(x+\frac{5}{3}\right)^2$, on obtient que, pour tout nombre réel r positif ou nul, d'une part

$$g\left(-\frac{5}{3}-r\right)=9\left(-\frac{5}{3}-r+\frac{5}{3}\right)^2=9\left(-r\right)^2=9r^2$$

car $(-r)^2=(-r)(-r)=rr=r^2$, et d'autre part

$$g\left(-\frac{5}{3}+r\right)=9\left(-\frac{5}{3}+r+\frac{5}{3}\right)^2=9\left(r\right)^2=9r^2.$$

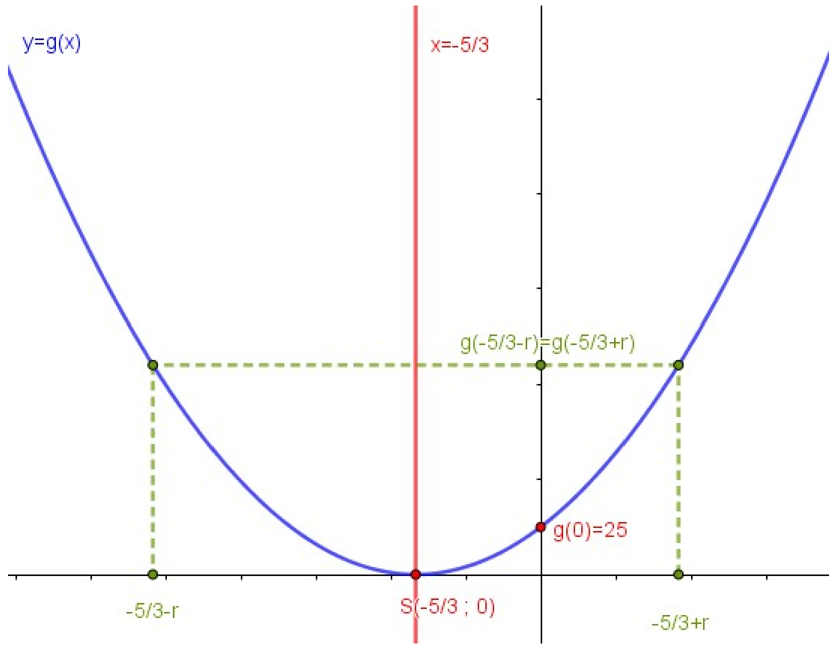
En conclusion

$$\forall r\geq 0\quad g\left(-\frac{5}{3}-r\right)=g\left(-\frac{5}{3}+r\right)$$

ce qui signifie graphiquement que la droite verticale d'équation $x=-\frac{5}{3}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction g.

7) Avec la forme développée $g(x)=9x^2+30x+25$ du polynôme $g(x)$, on obtient immédiatement l'ordonnée à l'origine $g(0)=9\times 0^2+30\times 0+25=25$.

Ceci, en combinaison avec l'intégralité des résultats précédents, conduit à la courbe représentative de la fonction g.



8) Graphiquement, on vérifie la forme canonique $g(x)=9\left(x+\frac{5}{3}\right)^2$ de $g(x)=9x^2+30x+25$ définie sous forme développée en traçant avec la calculatrice les courbes représentatives des fonctions $9x^2+30x+25$ et $9\left(x+\frac{5}{3}\right)^2$, puis en observant une seule courbe.

Graphiquement, on vérifie que l'équation $g(x)=0$ admet la seule solution réelle $-\frac{5}{3}$ en observant que la courbe représentative de la fonction g « coupe »l'axe des abscisses seul point d'abscisse $-\frac{5}{3}$.

Graphiquement, on vérifie le tableau de signes de $g(x)$ en observant que sur $\mathbb{R}$, la courbe représentative de la fonction g est au-dessus de l'axe des abscisses g et le « coupe »au point d'abscisse $-\frac{5}{3}$.

Graphiquement, on vérifie que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{5}{3}\right]$ et est strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{5}{3};+\infty\right[$.

Graphiquement, on vérifie que la droite verticale d'équation $x = -\frac{5}{3}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction g.

Graphiquement, on vérifie que l'ordonnée à l'origine de la fonction g est $g(0) = 25$ car la courbe représentative de la fonction g « coupe »l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 25.