Sujet

On considère le polynôme de degré 2 suivant $h(x) = -25x^2 + 10x - 10$.

q1) Montrer que la forme canonique du polynôme $h(x)$ est $-25\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - 9$.

q2) A l'aide de la forme canonique du polynôme $h(x)$, montrer que l'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solution réelle.

q3) Expliquer pourquoi on ne peut pas factoriser le polynôme $h(x)$ comme le produit de deux polynômes de degré 1.

q4) A l'aide de la forme canonique du polynôme $h(x)$, réaliser le tableau de signes de $h(x)$.

q5) A l'aide de la forme canonique du polynôme $h(x)$, montrer que la fonction $h(x)$ est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{1}{5}\right]$ et est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right[$. Dresser le tableau des variations de la fonction $h(x)$.

q6) A l'aide de la forme canonique du polynôme $h(x)$, montrer que pour tout nombre réel r positif ou nul, on a $h\left(\frac{1}{5} - r\right) = h\left(\frac{1}{5} + r\right)$. Que peut-on déduire de cette égalité pour la courbe représentative de la fonction h ?

q7) A l'aide de l'ordonnée à l'origine $h(0)$ et des résultats obtenus précédemment, représenter la courbe représentative de la fonction h.

q8) A l'aide de la calculatrice, représenter la courbe représentative de la fonction h et vérifier l'intégralité des questions précédentes.

Corrigé (Ceci est un corrigé très détaillé. Dans la pratique, une rédaction beaucoup plus concise est attendue.)

1) Mettons le polynôme $h(x) = -25x^2 + 10x - 10$ sous forme canonique.

a) On factorise par le coefficient de x^2 si il est différent de 1.

$$-25x^2 + 10x - 10 = -25x^2 - 25\frac{10}{-25}x - 25\frac{10}{25} = -25\left(x^2 + \frac{10}{-25}x + \frac{10}{25}\right) = -25\left(x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}\right).$$

b) On fait apparaître le facteur 2 devant x dans l'objectif d'appliquer l'une des identités remarquables $(x+r)^2 = x^2 + \boxed{2}rx + r^2$ ou $(x-r)^2 = x^2 - \boxed{2}rx + r^2$.

$$-25\left(x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}\right) = -25\left(x^2 - \boxed{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}\right) = -25\left(x^2 - \boxed{2} \times \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}\right).$$

c) On reconnaît en $x^2 - 2 \times \frac{1}{5}x$ le début d'un carré à l'aide d'une des identités remarquables $(x+r)^2 = \boxed{x^2 + 2rx} + r^2$ ou $(x-r)^2 = \boxed{x^2 - 2rx} + r^2$ puis on retranche ce qui est nécessaire pour conserver l'égalité.

$$-25\left(\boxed{x^2 - 2 \times \frac{1}{5}x} + \frac{2}{5}\right) = -25\left(\boxed{\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} + \frac{2}{5}\right).$$

d) On effectue quelques simplifications.

$$\begin{aligned}
-25\left(\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{2}{5}\right) &= -25\left(\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{25} + \frac{10}{25}\right) \\
&= -25\left(\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{9}{25}\right) \\
&= -25\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - 25\frac{9}{25} \\
&= -25\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - 9.
\end{aligned}$$

e) En conclusion

$$h(x) = -25x^2 + 10x - 10 = -25\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - 9.$$

2) A l'aide de la forme canonique du polynôme $h(x)$, montrer que l'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solution réelle.

$$\begin{aligned}
h(x) = 0 &\iff -25\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - 9 = 0 \\
&\iff -25\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = 9 \\
&\iff \left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{9}{-25} \\
&\iff \left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = -\frac{9}{25}
\end{aligned}$$

Or $\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 \geq 0$ car $\forall r \in \mathbb{R} \quad r^2 \geq 0$ et $-\frac{9}{25} < 0$, de telle sorte que l'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

3) Expliquons pourquoi on ne peut pas factoriser le polynôme $h(x)$ comme le produit de deux polynômes de degré 1.

On peut factoriser $h(x)$ comme suit

$$h(x) = -25\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - 9 = -25\left[\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{9}{25}\right]$$

mais on ne peut poursuivre cette factorisation plus en avant dans la mesure où le facteur $\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{9}{25}$ est de la forme $r^2 + s$ avec $s > 0$ ce qui ne permet pas de se ramener à l'identité remarquable $u^2 - v^2 = (u - v) \times (u + v)$.

4) A l'aide de la forme canonique du polynôme $h(x)$, réalisons le tableau de signes de $h(x)$.

On a $h(x) = -25\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - 9 = -\left[\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + 9\right]$ et $\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 \geq 0$, $9 > 0$.

Or la somme d'un nombre réel positif ou nul et d'un nombre réel strictement positif étant strictement positive, on obtient $\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + 9 > 0$, et par suite $-\left[\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + 9\right] < 0$, c'est-à-dire $h(x) < 0$, ce qu'on peut représenter dans le tableau de signes

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$h(x)$	$-$

5) A l'aide de la forme canonique du polynôme $h(x)$, montrons que la fonction $h(x)$ est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{1}{5}\right]$.

Soient x et x' deux nombres réels dans l'intervalle $\left]-\infty; \frac{1}{5}\right]$ dans un certain ordre strict, par exemple

$$x < x' \leq \frac{1}{5}.$$

Montrons que les images $h(x)$ et $h(x')$ de x et x' par la fonction h sont dans le même ordre strict, c'est-à dire montrons

$$h(x) < h(x').$$

Avec la forme canonique, on a

$$h(x) = -25\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - 9 \qquad \text{et} \qquad h(x') = -25\left(x' - \frac{1}{5}\right)^2 - 9.$$

Par hypothèse

$$x < x' \leq \frac{1}{5}.$$

En retranchant $\frac{1}{5}$ membre à membre, opération qui conserve l'ordre, on obtient

$$x - \frac{1}{5} < x' - \frac{1}{5} \leq 0.$$

En passant au carré membre à membre, et sachant que la fonction carré est strictement décroissante sur l'ensemble des nombres négatifs ou nuls soit $a < b \leq 0 \Rightarrow a^2 > b^2$, on obtient

$$\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 > \left(x' - \frac{1}{5}\right)^2.$$

En multipliant par -25 membre à membre, opération qui change l'ordre car $-25 < 0$, on obtient

$$-25\left(x-\frac{1}{5}\right)^2 < -25\left(x'-\frac{1}{5}\right)^2.$$

En retranchant 9 membre à membre, opération qui conserve l'ordre, on obtient

$$-25\left(x-\frac{1}{5}\right)^2 - 9 < -25\left(x'-\frac{1}{5}\right)^2 - 9$$

soit

$$h(x) < h(x').$$

A l'aide de la forme canonique du polynôme $h(x)$, montrons que la fonction $h(x)$ est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{5};+\infty\right[$.

Soient x et x' deux nombres réels dans l'intervalle $\left[\frac{1}{5};+\infty\right[$ dans un certain ordre strict, par exemple

$$\frac{1}{5} \leq x < x'.$$

Montrons que les images $h(x)$ et $h(x')$ de x et x' par la fonction h sont dans l'ordre strict contraire, c'est-à dire montrons

$$h(x) > h(x').$$

Avec la forme canonique, on a

$$h(x) = -25\left(x-\frac{1}{5}\right)^2 - 9 \qquad \text{et} \qquad h(x') = -25\left(x'-\frac{1}{5}\right)^2 - 9.$$

Par hypothèse

$$\frac{1}{5} \leq x < x'.$$

En retranchant $\frac{1}{5}$ membre à membre, opération qui conserve l'ordre, on obtient

$$0 \leq x - \frac{1}{5} < x' - \frac{1}{5}.$$

En passant au carré membre à membre, et sachant que la fonction carré est strictement croissante sur l'ensemble des nombres positifs ou nuls soit $0 \leq a < b \leq\Rightarrow a^2 < b^2$, on obtient

$$\left(x-\frac{1}{5}\right)^2 < \left(x'-\frac{1}{5}\right)^2.$$

En multipliant par -25 membre à membre, opération qui change l'ordre car $-25 < 0$, on obtient

$$-25\left(x-\frac{1}{5}\right)^2 > -25\left(x'-\frac{1}{5}\right)^2.$$

En retranchant 9 membre à membre, opération qui conserve l'ordre, on obtient

$$-25\left(x-\frac{1}{5}\right)^2 - 9 > -25\left(x'-\frac{1}{5}\right)^2 - 9$$

soit

$$h(x) > h(x').$$

Notons également qu'avec la forme canonique de $h(x) = -25\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - 9$, on obtient immédiatement

$$h\left(\frac{1}{5}\right) = -25\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right)^2 - 9 = -25 \times 0^2 - 9 = -9.$$

En conclusion, le tableau des variations de la fonctions h sur $\mathbb{R}$ est

x	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	$+\infty$
$h(x)$	$\nearrow$	-9	$\searrow$

6) A l'aide de la forme canonique du polynôme $h(x)$, montrons que pour tout nombre réel r positif ou nul, on a $h\left(\frac{1}{5} - r\right) = h\left(\frac{1}{5} + r\right)$ puis interprétons graphiquement cette égalité pour la courbe représentative de la fonction h.

La forme canonique de $h(x)$ étant $h(x) = -25\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - 9$, on obtient que, pour tout nombre réel r positif ou nul, d'une part

$$h\left(\frac{1}{5} - r\right) = -25\left(\frac{1}{5} - r - \frac{1}{5}\right)^2 - 9 = -25\,(-r)^2 - 9 = -25r^2 - 9$$

car $(-r)^2 = (-r)(-r) = rr = r^2$, et d'autre part

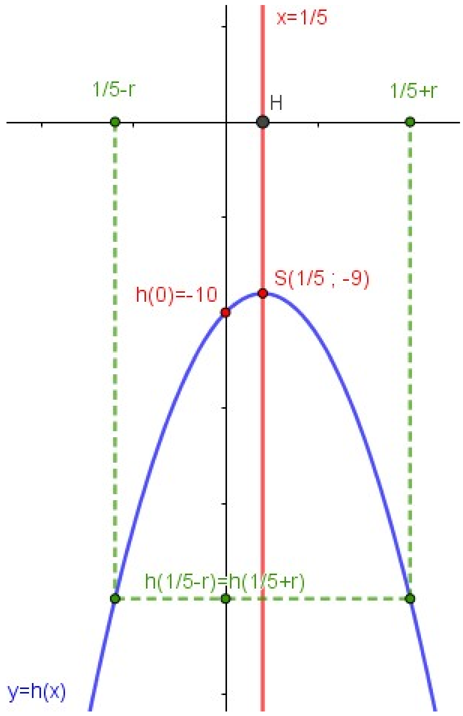
$$h\left(\frac{1}{5} + r\right) = -25\left(\frac{1}{5} + r - \frac{1}{5}\right)^2 - 9 = -25\,(r)^2 - 9 = -25r^2 - 9.$$

En conclusion

$$\forall r \geq 0 \quad h\left(\frac{1}{5} - r\right) = h\left(\frac{1}{5} + r\right)$$

ce qui signifie graphiquement que la droite verticale d'équation $x = \frac{1}{5}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction h.

7) Avec la forme développée $h(x) = -25x^2 + 10x - 10$ du polynôme $h(x)$, on obtient immédiatement l'ordonnée à l'origine $h(0) = -25 \times 0^2 + 10 \times 0 - 10 = -10$. Ceci, en combinaison avec l'intégralité des résultats précédents, conduit à la courbe représentative de la fonction h.



8) Graphiquement, on vérifie la forme canonique $h(x) = -25\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - 9$ de $h(x) = -25x^2 + 10x - 10$ définie sous forme développée en traçant avec la calculatrice les courbes représentatives des fonctions $-25x^2 + 10x - 10$, $-25\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - 9$ et en observant une seule courbe.

Graphiquement, on vérifie que l'équation $h(x) = 0$ n'admet pas de solution réelle en observant que la courbe représentative de la fonction h ne « coupe »pas l'axe des abscisses.

Graphiquement, on vérifie le tableau de signes de $h(x)$ en observant que sur $\mathbb{R}$, la courbe représentative de la fonction h est strictement au-dessous de l'axe des abscisses.

Graphiquement, on vérifie que la fonction h est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{1}{5}\right]$ et est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right[$.

Graphiquement, on vérifie que la droite verticale d'équation $x = \frac{1}{5}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction 5.

Graphiquement, on vérifie que l'ordonnée à l'origine de la fonction h est $h(0) = -10$ car la courbe représentative de la fonction h « coupe »l'axe des ordonnées au point d'ordonnée -10.